



AUDIO ENGINEERING SOCIETY
Italian Section

ANNUAL MEETING 2007

Paper: 07008

Parma, 23-25 November
“Casa della Musica”

CARATTERIZZAZIONE TEMPO-FREQUENZA DELLA RISPOSTA DI SISTEMI ELETTOACUSTICI TRAMITE ANALISI WAVELET

DANIELE PONTEGGIA¹, MARIO DI COLA²

¹Audiomatica, Firenze, Italia

dp@audiomatica.com

²Audio Labs Systems, Milano, Italia

mdicola@lisasystems.com

Un sistema elettroacustico può essere caratterizzato misurandone la risposta all'impulso (IR). Normalmente la IR misurata viene poi processata attraverso la trasformata di Fourier per ottenere la risposta in frequenza complessa. La IR e la risposta in frequenza complessa formano una coppia di visualizzazioni equivalenti dello stesso fenomeno. Una rappresentazione alternativa nel dominio congiunto tempo-frequenza può essere ottenuta mediante la trasformata Wavelet ed una visualizzazione su grafico a mappa di colori. In questo lavoro viene presentata l'implementazione dell'analisi Wavelet in un software di misura commerciale ed alcuni risultati della caratterizzazione di diversi tipi di sistemi elettroacustici.

1 INTRODUZIONE

Questo lavoro è frutto di una precedente ricerca degli autori sui filtri crossover a fase lineare [1]. L'interesse degli autori era quello di mostrare in modo semplice la distorsione temporale provocata da differenti tipologie di crossover. Durante la ricerca è apparso chiaro che gli strumenti disponibili per l'analisi della risposta nel tempo di sistemi di altoparlanti non sono facili da utilizzare e se non utilizzati con la giusta accortezza possono portare a trarre conclusioni errate.

Nonostante la relazione tra fase e tempo di sistemi elettroacustici sia ben documentata nella letteratura tecnica, la risposta in fase è spesso ancora considerata secondaria rispetto a quella in modulo, probabilmente a causa del fatto che non è facile da gestire. L'esperienza diretta degli autori, suffragata da prove di ascolto su sistemi reali e confermata da una serie di studi anche recenti [2] è che la distorsione temporale prodotta da sistemi di altoparlanti è direttamente correlata alla qualità sonora.

L'analisi di risposte di sistemi elettroacustici mediante trasformata Wavelet non è una novità, è opportuno citare i lavori di Keele [3], Gunness [4] and Loutridis [5]. Quest'ultimo in particolare, anche se carente nella parte di presentazione grafica dei risultati, presenta un trattamento piuttosto approfondito dell'argomento ed un'ottima bibliografia. Per quanto riguarda l'aspetto grafico di presentazione dei risulta-

ti, è opinione degli autori che i grafici del tipo waterfall non siano facili da interpretare e che siano invece da preferire grafici bidimensionali a mappa di colore. Il già citato lavoro di David Gunness è stato certamente fonte di ispirazione sia per l'aspetto grafico che per la sintesi di una serie di considerazioni sui risultati dell'analisi applicato alla messa a punto di sistemi elettroacustici.

La teoria alla base della trasformata Wavelet è piuttosto recente, è stata inizialmente sviluppata nell'ambito della geologia, ma ha preso rapidamente piede in molte differenti discipline. Attualmente il numero di pubblicazioni scientifiche sull'argomento è cospicuo, una ricerca della parola wavelet in un motore di ricerca può ritornare diverse migliaia di link. Questa vastità di materiale, unita alla multidisciplinarietà delle applicazioni rende l'approccio piuttosto difficile per il principiante, rendendo estremamente difficile l'apprendimento. Vale la pena citare un articolo di Rioul e Vetterli [6] che fornisce una efficace introduzione sull'argomento Wavelet.

2 CARATTERIZZAZIONE SISTEMI ELETTOACUSTICI

Un sistema elettroacustico, almeno nella sua parte lineare, può essere descritto attraverso la sua risposta all'impulso (IR). La IR è di norma ottenuta mediante strumenti di misu-

razione basati su computer, piazzando un microfono ad una certa distanza dal sistema da testare (DUT).

Dato che la IR viene salvata in formato digitale all'interno della memoria del computer è possibile applicare dei post-processing in modo semplice utilizzando i ben noti algoritmi di Fast Fourier Transform (FFT). Il passaggio tra i domini del tempo e frequenza, ovvero tra la risposta all'impulso e la risposta in frequenza complessa è dunque una operazione semplice e veloce.

In questo lavoro verrà utilizzata la trasformata di Fourier nella sua forma radiale:

$$h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H(\omega) \quad (1)$$

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2)$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (3)$$

E' anche possibile realizzare elaborazioni più complesse come il calcolo dell'involuppo del segnale analitico (Energy Time Curve ETC) [7] oppure analisi congiunte tempo-frequenza come il Cumulative Spectral Decay (CSD) e la Short Time Fourier Transform STFT [8].

La risposta all'impulso e la risposta in frequenza complessa sono una coppia di descrizioni del medesimo fenomeno, legate tra di loro attraverso la trasformata di Fourier (FT). A causa della natura della FT, che è basata su un nucleo di segnali di energia infinita, risulta difficile ottenere informazioni nel dominio del tempo dalla risposta in frequenza complessa e d'altro canto è difficile ottenere informazioni nel dominio della frequenza dalla IR.

2.1 Risposta all'impulso

La risposta all'impulso $h(t)$ di un sistema elettroacustico ne descrive il comportamento lineare. Una volta nota la IR, attraverso l'integrale di convoluzione è possibile conoscere l'uscita del sistema $y(t)$ dato uno stimolo $x(t)$. Dall'analisi mediante ispezione visiva della IR il comportamento nel dominio del tempo del sistema è evidenziato chiaramente, mentre informazioni sul dominio della frequenza non sono di facile estrazione. E' necessaria un'ottima esperienza per avere informazioni, piuttosto grossolane, nel dominio della frequenza.

Ad esempio, la IR di un sistema a due vie professionale è illustrata in figura 1. Un occhio attento nota immediatamente che le due vie non sono perfettamente allineate, ma non risulta facile quantificarne il disallineamento o quali bande di frequenza siano interessate.

Per estrapolare un maggior numero di informazioni dalla risposta all'impulso esistono una serie di processamenti che possono essere utilizzati, ad esempio la risposta al gradino (Step Response) e la Energy Time Curve (ETC).

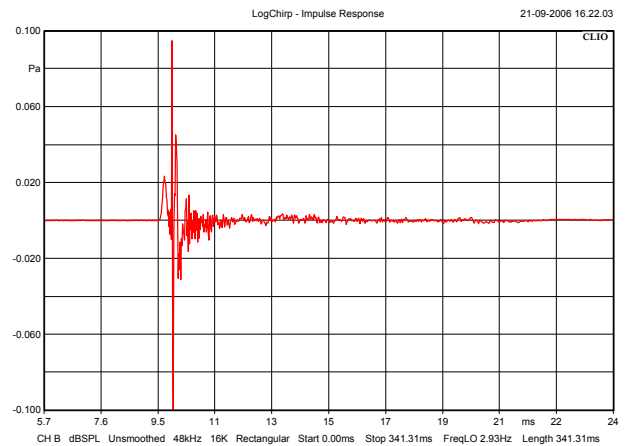


Figura 1: Risposta all'impulso di un sistema elettroacustico a due vie

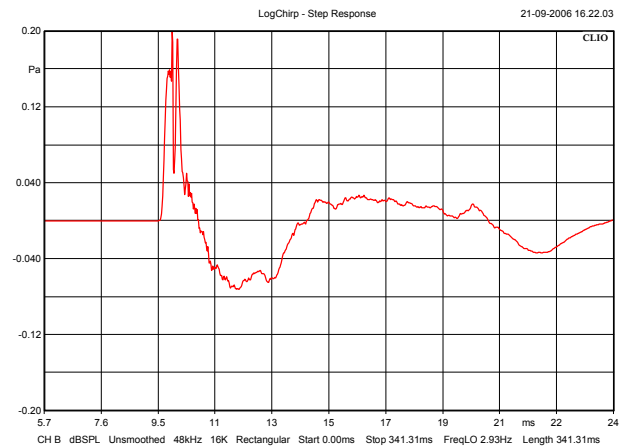


Figura 2: Risposta al gradino di un sistema elettroacustico a due vie

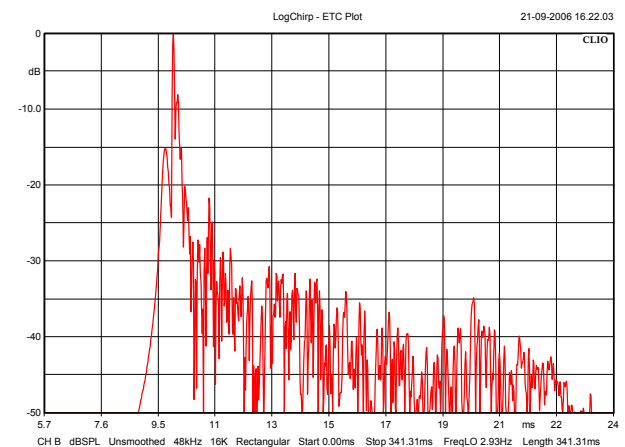


Figura 3: Grafico ETC di un sistema elettroacustico a due vie

La risposta al gradino è la risposta del sistema ad una funzione a gradino. Ci permette di avere una misura qualitativa della coerenza temporale del sistema, ma allo stesso tempo fornisce ben poche informazioni nel dominio della frequenza. La risposta all'impulso dello stesso sistema a due vie è mostrata in figura 2.

La ETC è definita come l'involuppo del segnale analitico. Il segnale analitico è una grandezza complessa, la cui parte reale è pari a quella della IR e la cui parte immaginaria è calcolata tramite la trasformata di Hilbert della IR. L'ETC non rappresenta direttamente l'energia presente nel sistema, può essere interpretata come una misura del modulo della risposta all'impulso, dato che l'involuppo rimuove le oscillazioni negative della IR. Dal nostro punto di vista, ovvero per quello che riguarda la ricerca di informazioni nel dominio della frequenza, si può affermare che il diagramma dell'ETC non aggiunge informazioni. La figura 3 mostra il diagramma ETC del sistema a due vie.

Nessuna delle rappresentazioni nel dominio del tempo permette di ricavare informazioni nel dominio della frequenza.

2.2 Risposta in frequenza complessa

La risposta in frequenza complessa $H(\omega)$ di un sistema si ottiene mediante la trasformata di Fourier della risposta all'impulso $h(t)$. La risposta in frequenza è ancora una descrizione completa del funzionamento lineare del sistema, attraverso il prodotto della trasformata del segnale in ingresso $X(\omega)$ e della $H(\omega)$ è possibile predire l'uscita $Y(\omega)$ del sistema.

In questo caso è possibile ottenere alcune informazioni sul comportamento temporale del sistema dall'analisi della risposta in frequenza complessa. In effetti è prassi comune verificare il corretto allineamento temporale dei sistemi elettroacustici analizzando l'andamento della fase della risposta in frequenza complessa.

Se si definisce, come sistema perfetto, un sistema con risposta in modulo piatta e fase lineare, almeno nella banda di interesse, allora si può notare come il sistema non crei distorsione di ampiezza e non generi distorsione di fase (con l'eccezione di un eventuale ritardo totale che rimane costante con la frequenza). La risposta all'impulso di un sistema di questo tipo si presenta come una funzione simile ad un seno cardinale traslata di un tempo pari al ritardo totale del sistema.

Una relazione diretta tra fase e tempo può essere data solo nel caso in cui la risposta del sistema sia del tipo passa-tutto. Solo in questo caso il negativo della derivata (rispetto alla frequenza) della risposta in fase (ovvero il ritardo di gruppo) rappresenta esattamente il ritardo di tempo del sistema. Se il sistema non è del tipo passa-tutto, non è possibile definire un singolo istante di arrivo in funzione della frequenza. Anche per sistemi molto semplici, come può esserlo ad esempio un filtro passa alto, l'energia (in funzione della frequenza) non arriva in un singolo istante di tempo [9] [10].

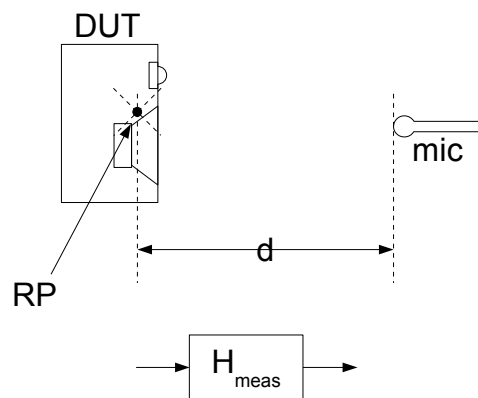


Figura 4: Modello della sorgente come puntiforme con posizione di riferimento nota

In modo del tutto generale è possibile notare che tipicamente all'uscita di un sistema elettroacustico l'energia che attraversa il sistema viene rilasciata con una certa distorsione temporale.

Una delle maggiori difficoltà che si incontrano tentando di analizzare la fase in una risposta in frequenza complessa risiede nel contesto di misura e nelle assunzioni più o meno implicite che vengono compiute in fase di misurazione. Quando si misura un sistema elettroacustico, si misura la risposta combinata del sistema stesso più la risposta dell'ambiente in cui si effettua la misura. Un approccio corretto al problema richiede che il modello di misurazione sia noto, in particolare deve essere nota tutta la catena di misura dalla sorgente al ricevitore, ovvero i due punti tra cui verrà misurata la risposta all'impulso.

È possibile considerare un modello semplificato che includa solo il sistema elettroacustico e la propagazione diretta del suono, assumendo che: tutte le altre componenti siano lineari, l'ambiente di misura sia anecoico e l'aria sia in stato di quiete. In questo caso la risposta misurata è composta dalla risposta del sistema elettroacustico $H_{DUT}(\omega)$ ed un termine di propagazione $H_{propagation}(\omega)$:

$$H_{meas}(\omega) = H_{DUT}(\omega) \cdot H_{propagation}(\omega) \quad (4)$$

Se la distanza tra il sistema misurando ed il microfono di misurazione è al di sotto di pochi metri si può tralasciare l'effetto dell'assorbimento dell'aria e considerare il termine $H_{propagation}(\omega)$ come un semplice delay. Resta comunque molto difficile estrarre dalla risposta misurata la parte relativa al solo misurando, dato che è affogata nella componente di propagazione (Figura 5).

Esistono diverse modalità per cercare di rimuovere la parte di propagazione e recuperare la risposta del sistema, in ogni caso è necessario creare un modello per la misurazione e assumere delle ipotesi a priori.

Una delle possibili soluzioni è quella di modellare il sistema come una sorgente puntiforme posta in una posizio-

ne nota (figure 4), dunque la distanza d tra la posizione di riferimento della sorgente RP ed il microfono è nota.

A questo punto è possibile calcolare il tempo di ritardo dovuto alla propagazione t_{delay} :

$$t_{\text{delay}} = \frac{d}{c} \quad (5)$$

poi il delay t_{delay} può essere matematicamente rimosso dalla funzione di trasferimento $H_{\text{meas}}(\omega)$ attraverso la relazione:

$$H_{\text{DUT}}(\omega) = H_{\text{meas}}(\omega)e^{j\omega t_{\text{delay}}} \quad (6)$$

Una seconda soluzione, utilizzata da diversi sistemi di misura (in particolare quelli che misurano la funzione di trasferimento in modalità live), è quella di prendere come valore del ritardo l'istante in cui la risposta all'impulso presenta il suo valore massimo. In figura 6 viene mostrata la risposta in frequenza complessa una volta rimosso il ritardo utilizzando come valore il tempo in cui la IR raggiunge il suo picco.

Una terza soluzione è basata sull'analisi del ritardo di gruppo della fase eccesso. Utilizzando la trasformata di Hilbert è possibile separare la risposta in fase misurata $H_{\text{meas}}(\omega)$ nei due contributi dovuti alla parte a fase minima $H_{\text{minimum}}(\omega)$ e dalla parte di fase in eccesso $H_{\text{excess}}(\omega)$:

$$H_{\text{meas}}(\omega) = H_{\text{minimum}}(\omega) \cdot H_{\text{excess}}(\omega) \quad (7)$$

$$H_{\text{meas}}(\omega) = H_{\text{minimum}}(\omega) \cdot H_{\text{all pass}}(\omega) \cdot H_{\text{delay}}(\omega) \quad (8)$$

Il ritardo di gruppo calcolato dalla parte di fase in eccesso fornisce una lettura del ritardo di tempo in funzione della frequenza. Se è possibile individuare una parte di spettro dove il ritardo di gruppo della fase in eccesso è costante, significa che la risposta del sistema misurato $H_{\text{meas}}(\omega)$ è a fase minima in quella banda. Utilizzando questo valore è possibile separare la parte di ritardo $H_{\text{delay}}(\omega)$ dalla risposta del sistema.

Fortunatamente la conoscenza assoluta della fase della risposta in frequenza complessa non è di solito necessaria. Molto spesso le risposte misurate vengono utilizzate dai software di simulazione e progettazione, questi richiedono dei valori relativi ad un certo ritardo che può essere assunto in modo sufficientemente arbitrario.

Si assuma ora che il ritardo dovuto al contesto di misurazione sia stato rimosso in modo corretto, resta ancora una certa ambiguità nella lettura dei diagrammi di fase. E' comune pratica ingegneristica rappresentare i diagrammi della risposta in frequenza con asse delle ascisse logaritmico, benchè questo possa essere di aiuto quando si tratta di verificare che una certa risposta devia dal tipico andamento piatto, nella generica interpretazione della linearità può trarre in inganno. Ovvero: non è semplice interpretare un andamento lineare su una scala che è invece logaritmica (Figura 8).

Si è analizzato fin'ora quali sono le possibilità e le limitazioni dell'analisi in uno dei due domini: tempo e frequenza. Soprattutto si è potuto apprezzare che quando da un dominio si cerca di ricavare informazioni sull'altro nascono una serie di problemi di difficile soluzione.

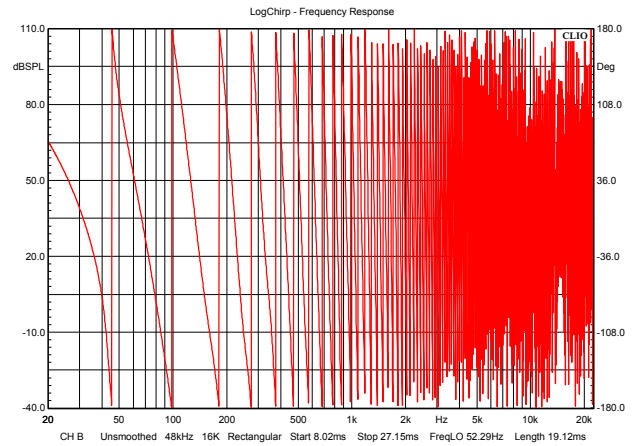


Figura 5: Fase della risposta in frequenza sistema a due vie, ritardo non rimosso

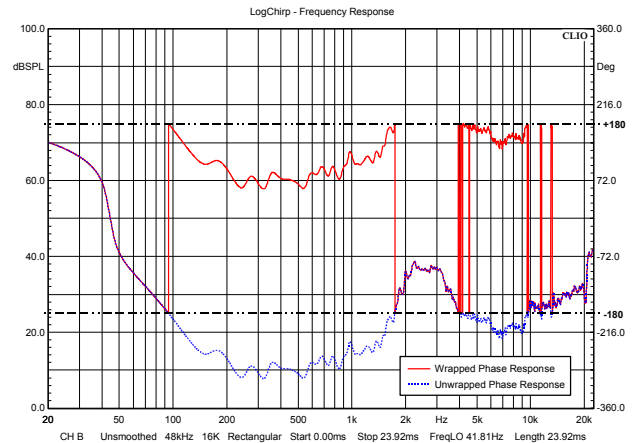


Figura 6: Fase della risposta in frequenza sistema a due vie, ritardo rimosso

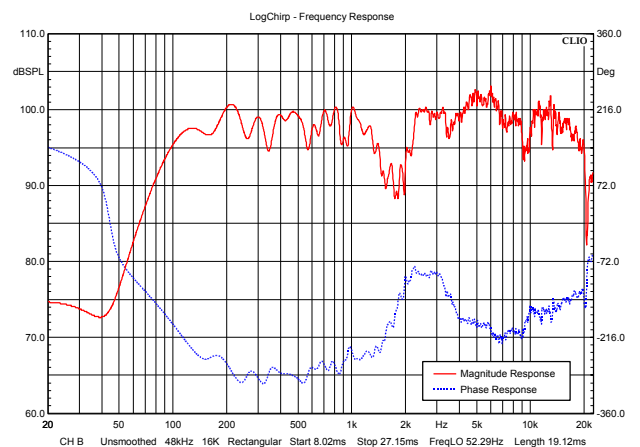


Figura 7: Risposta in frequenza complessa sistema due vie, ritardo rimosso

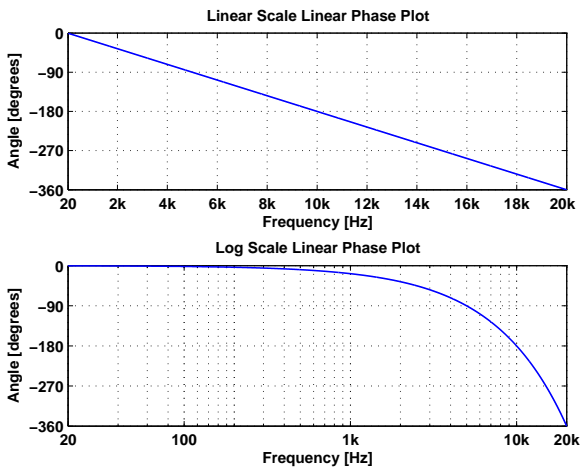


Figura 8: Fase lineare (ritardo puro) rappresentata in scala lineare e logaritmica

E' possibile pensare alla rappresentazione nei due domini come una proiezione su due assi ortogonali, se ci si spinge fortemente nell'analisi in un dominio si perde necessariamente il contatto con l'altro.

Nasce quindi l'esigenza di nuove descrizioni che tengano conto delle caratteristiche congiunte in un dominio bidimensionale tempo-frequenza.

2.3 Cumulative Spectral Decay

Il Cumulative Spectral Decay (CSD) è una prima descrizione nel dominio congiunto tempo-frequenza, e permette di visualizzare il decadimento dell'energia in un sistema. Il CSD è calcolato sezionando la risposta all'impulso utilizzando una finestra temporale che si accorcia progressivamente, eliminando di fatto in maniera sempre più cospicua la parte iniziale della risposta all'impulso. Le varie sezioni ottenute vengono poi trasformate con Fourier e visualizzate su di un grafico di tipo waterfall o a mappa di colore.

Un esempio di CSD per il solito sistema a due vie e rappresentata come grafico waterfall è riportata in figura 10.

2.4 Short Time Fourier Transform STFT

L'idea di base della STFT è quella di cercare di seguire l'evoluzione temporale dello spettro della IR tramite la FT di sezioni della IR stessa:

$$\mathcal{F}_h(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)g(t - \tau)e^{-j\omega t} dt \quad (9)$$

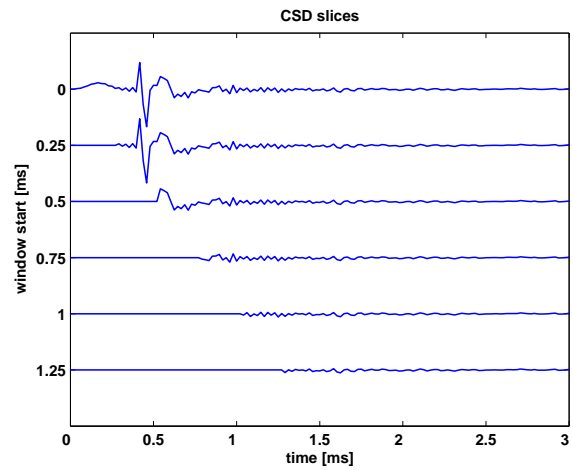


Figura 9: Esempio di finestatura della risposta all'impulso per il calcolo del CSD

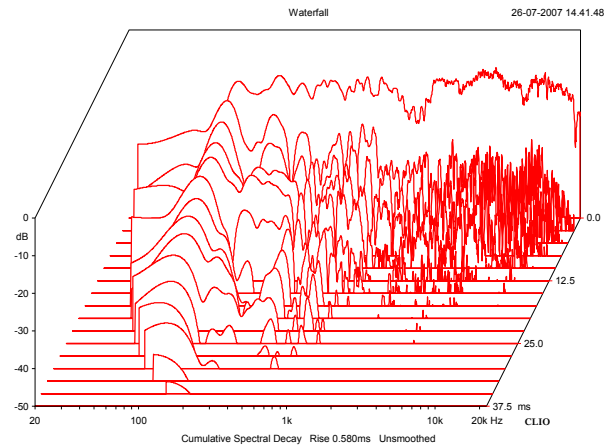


Figura 10: CSD waterfall del sistema a due vie

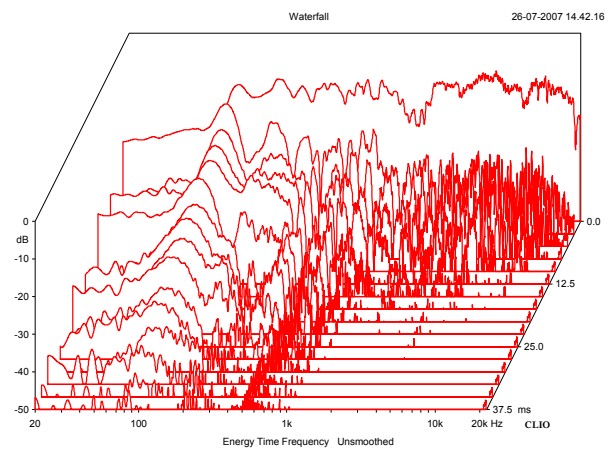


Figura 11: STFT waterfall del sistema a due vie

Il problema della STFT è la sua risoluzione fissa nel dominio tempo-frequenza, la stessa finestra temporale è applicata a tutte le frequenze. Una finestra FFT corta, ovvero una alta risoluzione nel tempo, implica una bassa risoluzione in frequenza e viceversa una alta risoluzione in frequenza richiede una FFT lunga e dunque una bassa risoluzione nel tempo. Dal punto di vista dell'analisi di un segnale a larga banda come la risposta di un sistema elettroacustico questo corrisponde ad avere una risoluzione in frequenza troppo bassa alle basse frequenze ed una risoluzione nel tempo troppo bassa alle alte frequenze. Nonostante ciò, la STFT, è stata ed è un valido strumento per l'analisi di segnali a banda stretta o breve durata, ma è di scarsa utilità quando utilizzata per segnali a banda larga e di lunga durata come la risposta di sistemi elettroacustici.

Per superare i limiti della STFT è possibile pensare di utilizzare diverse finestre temporali per diverse bande di frequenza, creando di fatto una STFT multi-risoluzione. Si può ad esempio calcolare un insieme di STFT con diverse dimensioni della FFT e poi ricombinare i risultati in un singolo grafico. Recentemente sono stati presentati degli interessanti risultati nell'applicazione di questa tecnica per il riconoscimento di segnali musicali [11], ma non ne è stata realizzata nessuna applicazione per la caratterizzazione dei sistemi elettroacustici.

Occorre poi citare altri strumenti di analisi congiunta tempo-frequenza come la distribuzione di Wigner-Ville. Questa distribuzione è stata già oggetto di interesse nell'applicazione dell'analisi della risposta di sistemi elettroacustici [12], ma a causa degli artefatti che genera la sua interpretazione risulta piuttosto difficile. Di recente [13] è stato presentato un lavoro che utilizza una versione corretta della Wigner-Ville che tenta di rimuovere il più possibile tali artefatti, mantenendo l'elevata risoluzione di questo tipo di analisi.

3 TRASFORMATA WAVELET CONTINUA

La Trasformata Wavelet Continua (CWT) di un segnale $h(t)$ è definita come il prodotto scalare:

$$\mathcal{W}_h(a, b) = \langle h(t), \psi_{a,b}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \overline{\psi_{a,b}(t)} dt \quad (10)$$

tra la risposta all'impulso $h(t)$ ed una versione scalata e traslata di una funzione $\psi(t)$ detta Wavelet Madre:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (11)$$

dove il fattore $1/\sqrt{|a|}$ è stato introdotto per normalizzare l'energia di ciascun fattore di scala a .

Dunque la CWT può essere scritta anche come:

$$\mathcal{W}_h(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \quad (12)$$

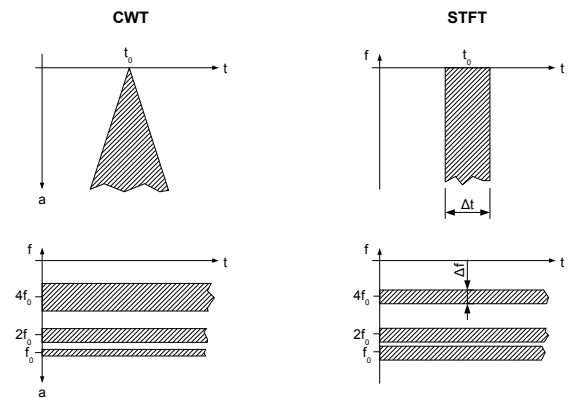


Figura 12: Comparazione tra risoluzione della Wavelet e della STFT: regioni di influenza di un impulso di Dirac (sopra) e tre sinusoidi (sotto)

Al fine di ricostruire perfettamente il segnale attraverso i coefficienti $\mathcal{W}_h(a, b)$ ed una trasformata inversa, la funzione Wavelet Madre deve soddisfare la condizione di ammissibilità:

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (13)$$

dove $\Psi(\omega)$ è la trasformata di Fourier di $\psi(t)$.

Come conseguenza della condizione di ammissibilità, la funzione $\psi(t)$ deve essere una risposta all'impulso di banda limitata, il nome *wavelet* deriva proprio dal fatto che questo tipo di segnali ha l'aspetto di una piccola onda [14].

Esistono diverse possibili interpretazioni fisiche della trasformata Wavelet, in buona sostanza si tratta di una rimappatura dal dominio mono-dimensionale del tempo della risposta all'impulso $h(t)$ in uno spazio bidimensionale con un fattore di scala a ed una traslazione nel tempo b [15].

Dato che la funzione Wavelet Madre $\psi(t)$ viene scalata e non modulata come nel caso del kernel della STFT, l'analisi Wavelet è chiamata tempo-scala invece che tempo-frequenza.

I parametri a e b non hanno effetto sulla forma del kernel della trasformata, ma la risoluzione nel tempo ed in frequenza dipendono dal fattore di scala a . Alle alte frequenze (per bassi valori di a) si ottiene una buona risoluzione nel tempo ma una scarsa risoluzione in frequenza, mentre per le basse frequenze (per alti valori di a) si ha una buona risoluzione in frequenza ma scarsa risoluzione nel tempo. Dunque l'analisi Wavelet può essere considerata una analisi a Q o banda costante e per questa ragione si adatta molto bene all'analisi di segnali non stazionari a banda larga, come la risposta all'impulso di sistemi elettroacustici.

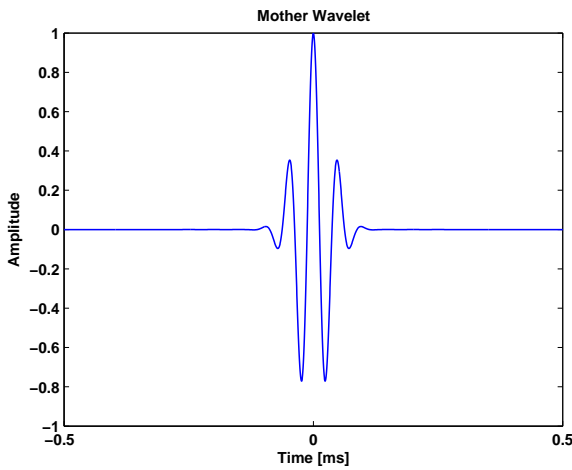


Figura 13: Wavelet Madre (parte reale) con BW di 1/3 di ottava

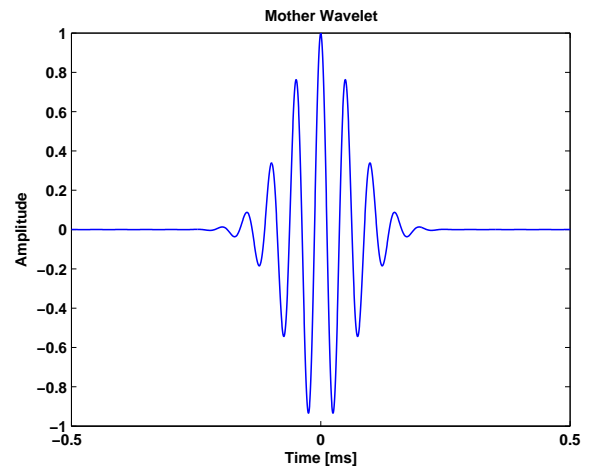


Figura 14: Wavelet Madre (parte reale) con BW di 1/6 di ottava

3.1 Scalogramma

Lo *Spettrogramma* è una forma di rappresentazione dell'energia di un segnale nel dominio tempo-frequenza ben nota ed è definita come il modulo quadrato della STFT.

In maniera del tutto simile è possibile definire lo *Scalogramma* come il modulo quadrato della CWT. L'energia del segnale può essere rappresentata in funzione del fattore di scala a e della traslazione nel tempo b :

$$E_h = \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |\mathcal{W}_h(a, b)|^2 \frac{dad b}{a^2} \quad (14)$$

Il valore $|\mathcal{W}_h(a, b)|^2$ può essere rappresentato sotto forma di grafico a mappa di colore, con il tempo nell'asse delle ascisse e la frequenza nell'asse delle ordinate, utilizzando una gradazione di colore per indicare per ogni punto del dominio il valore di modulo quadrato associato. In effetti si parla ora di tempo-frequenza dato che è possibile, una volta stabilita la Wavelet Madre, definire una frequenza equivalente associata ad ogni fattore di scala a . Il parametro b invece può essere interpretato direttamente come tempo.

3.2 Risoluzione Tempo-Frequenza

Si cerca per la CWT una base di funzioni che permettano una risoluzione tempo-frequenza ottimale.

Si definiscono i centri temporale t_ψ e spettrale ω_ψ della base di funzioni della trasformata Wavelet come:

$$t_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} t \frac{|\psi(t)|^2}{\|\psi\|^2} dt \quad (15)$$

$$\omega_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \omega \frac{|\Psi(\omega)|^2}{\|\Psi\|^2} d\omega \quad (16)$$

E' inoltre possibile definire la larghezza dell'intervallo temporale Δt_ψ e spettrale $\Delta \omega_\psi$:

$$\Delta t_\psi = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (t - t_\psi)^2 \frac{|\psi(t)|^2}{\|\psi\|^2} dt} \quad (17)$$

$$\Delta \omega_\psi = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_\psi)^2 \frac{|\Psi(\omega)|^2}{\|\Psi\|^2} d\omega} \quad (18)$$

Il prodotto tempo-frequenza è limitato dal principio di indeterminazione tempo-frequenza:

$$\Delta t_\psi \Delta \omega_\psi \geq \frac{1}{2} \quad (19)$$

E' possibile dimostrare che la funzione che minimizza il prodotto è l'impulso Gaussiano. In effetti l'energia di questo segnale è ragionevolmente concentrata sia nel dominio del tempo che in quello della frequenza, ma allo stesso tempo non è limitato in nessuno dei due domini. Un impulso Gaussiano modulato è dunque un ottimo candidato come Wavelet Madre.

3.3 Wavelet Madre

In accordo con Loutridis, si sceglie come Wavelet Madre una Wavelet Morlet complessa modificata:

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi B}} e^{j\omega_0 t} e^{-t^2/B} \quad (20)$$

Si noti che la funzione è composta da un termine complesso di oscillazione e da un fattore di decadimento, come richiesto dalla condizione di ammissibilità. Si noti comunque che, nel nostro caso, la condizione di ammissibilità può essere rilassata, dato che siamo interessati all'analisi delle proprietà del segnale e non alla sua ricostruzione.

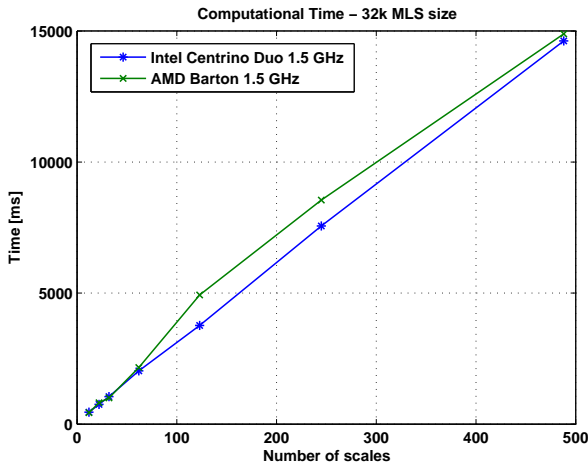


Figura 15: Tempo di calcolo - 32k MLS

La trasformata di Fourier della Wavelet Madre è:

$$\Psi(\omega) = e^{-(\omega-\omega_0)^2 B/4} \quad (21)$$

Le risoluzioni in tempo e frequenza della Wavelet scelta possono essere calcolate dalle precedenti definizioni come:

$$t_\psi = 0 \quad (22)$$

$$\omega_\psi = \omega_0 \quad (23)$$

$$\Delta t_\psi = \frac{\sqrt{B}}{2} \quad (24)$$

$$\Delta \omega_\psi = \frac{1}{\sqrt{B}} \quad (25)$$

E' possibile indicare il parametro B come funzione della larghezza di banda dell'analisi BW o del fattore Q :

$$BW = \frac{1}{Q} = \frac{2\Delta\omega_\psi}{\omega_\psi} = \frac{2}{\omega_0\sqrt{B}} \quad (26)$$

$$B = \frac{4}{(\omega_0 BW)^2} = 4 \left(\frac{Q}{\omega_0} \right)^2 \quad (27)$$

4 Calcolo dei coefficienti della Wavelet

Il calcolo dei coefficienti della trasformata Wavelet direttamente dall'equazione (12) è molto dispendioso dal punto di vista computazionale.

All'inizio di questa ricerca sono stati compiuti una serie di tentativi di calcolo diretto dei coefficienti in Matlab, ma il tempo di calcolo e la risoluzione dei risultati non erano soddisfacenti.

4.1 Algoritmo di calcolo

Può invece essere utilizzato un approccio alternativo basato sulla tecnica convenzionale della trasformata di Fourier.

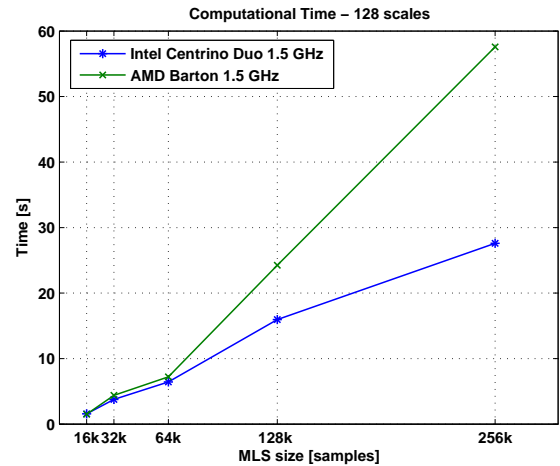


Figura 16: Tempo di calcolo - 128 scale

Attraverso la FT e le sue proprietà di traslazione in tempo e frequenza è possibile calcolare la trasformata di Fourier delle funzioni del kernel della trasformata Wavelet:

$$h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H(\omega) \quad (28)$$

$$\psi(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \Psi(\omega) \quad (29)$$

$$\psi_{a,b}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \Psi_{a,b}(\omega) \quad (30)$$

$$\frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \sqrt{|a|} e^{-j\omega b} \Psi(a\omega) \quad (31)$$

Dalla equazione (10) ed utilizzando la relazione di Parseval si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_h(a,b) &= \langle h(t), \psi_{a,b}(t) \rangle \\ &= \langle H(\omega), \Psi_{a,b}(\omega) \rangle \\ &= \sqrt{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \overline{\Psi(a\omega)} e^{-j\omega b} d\omega \\ &= \sqrt{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} [H(\omega) \overline{\Psi(a\omega)}] e^{j\omega b} d\omega \end{aligned} \quad (32)$$

che è nella forma di una trasformata inversa di Fourier del prodotto del contenuto spettrale del segnale $H(\omega)$ ed il complesso coniugato della funzione Wavelet madre scalata $\Psi(\omega)$, a parte un termine $1/\sqrt{2\pi}$.

Dato il fattore di scala a , è possibile calcolare i coefficienti della trasformata continua Wavelet utilizzando le diffuse implementazioni numeriche della trasformata di Fourier, ovvero la Fast Fourier Transform FFT diretta e la Fast Fourier Transform inversa IFFT:

$$\mathcal{W}_h(a,b) = \sqrt{|a|} \text{IFFT} \left[\text{FFT} [h(t)] \overline{\Psi(a\omega)} \right] \quad (33)$$

Ripetendo questa procedura numerica per un certo numero di valori del fattore di scala a si ottiene una matrice bidimensionale di coefficienti $\mathcal{W}_h(a,b)$ che possono poi essere elaborati per creare il grafico a mappa di colore.

Dato che la risoluzione della rappresentazione grafica è legato alla risoluzione del media di visualizzazione, ovvero tipicamente lo schermo del computer, non c'è necessità di calcolare la matrice per più di qualche centinaio di valori di a .

L'analisi Wavelet è stata prima testata in Matlab e poi implementata nel sistema di misura CLIO. Al fine di permettere una effettiva usabilità dello strumento di analisi, sono stati realizzati una serie di test di tempo di calcolo i cui risultati sono riportati sinteticamente nelle figure 15 e 16).

Sperimentalmente si è osservato che il miglior compromesso tra velocità di calcolo e accuratezza dei risultati è ottenuto per un numero di scale tra 2^7 and 2^8 , in questo caso il tempo di calcolo rimane sempre al di sotto dei 60 secondi, anche con macchine non particolarmente potenti. In teoria dato che l'analisi avviene in tempo differito potrebbe, in linea del tutto teorica, protrarsi per una quantità di tempo praticamente illimitata, è opinione degli autori però che per un utilizzo pratico dello strumento di analisi Wavelet una risposta in tempi sufficientemente brevi sia importante.

5 RAPPRESENTAZIONE GRAFICA

E' già stato introdotto in precedenza che, per la rappresentazione grafica dello *Scalogramma*, si è scelto di utilizzare un grafico bidimensionale a mappa di colore. Nella esperienza degli autori questa rappresentazione permette una visualizzazione chiara dell'andamento del flusso di energia nel tempo ed in frequenza all'interno del sistema.

Come illustrato nell'introduzione di questo articolo, le varie rappresentazioni su un singolo dominio forniscono, ovviamente, una chiara visualizzazione del segnale solo in quel dominio. Lo *Scalogramma* della trasformata Wavelet, date le sue caratteristiche di risoluzione congiunta tempo-frequenza, permette invece di avere una visione d'insieme dei due domini, ma qualsiasi tentativo di interpretarne i risultati in termini di uno solo dei domini è destinata a fallire.

Una volta che la matrice dei coefficienti della Wavelet $W_h(a, b)$ è calcolata per un certo numero di valori del fattore di scala a , cioè per un certo numero di frequenze, allora lo *Scalogramma* può essere visualizzato. La mappa di colore viene realizzata utilizzando un algoritmo di interpolazione bilineare a partire dai punti disponibili nel piano tempo-frequenza.

5.1 Normalizzazione

Durante la ricerca si è notato immediatamente che la rappresentazione diretta dei risultati della trasformata con lo *Scalogramma* non forniva un risultato soddisfacente. Ovvero, i risultati erano del tutto in linea con la teoria, ma di difficile lettura nell'utilizzo pratico. Si è deciso dunque di applicare una normalizzazione di scala per ottenere una visualizzazione di più facile lettura, questa normalizzazione consta in pratica nell'ignorare il termine di normalizzazione dell'energia in funzione del fattore di scala introdotta dalla definizione (11).

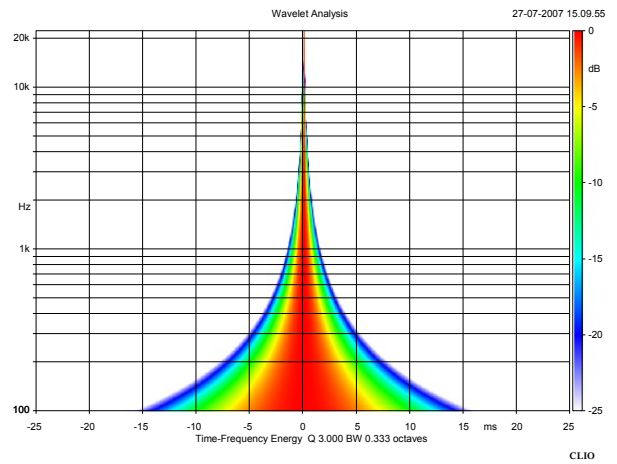


Figura 17: Analisi Wavelet di un sistema perfetto

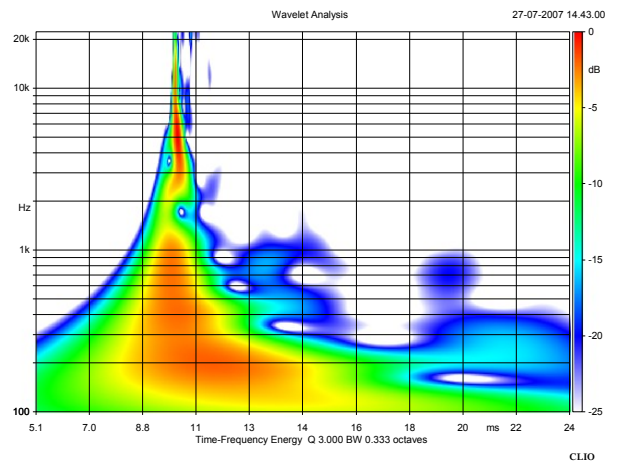


Figura 18: Analisi Wavelet di sistema due vie, BW 1/3 ottava

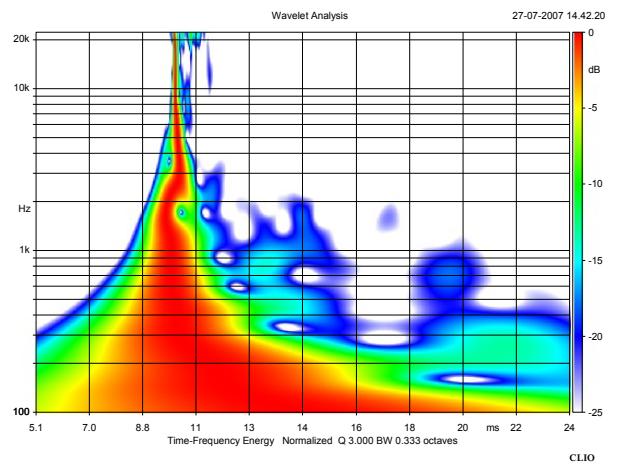


Figura 19: Analisi Wavelet di sistema due vie, BW 1/3 ottava, con normalizzazione del livello

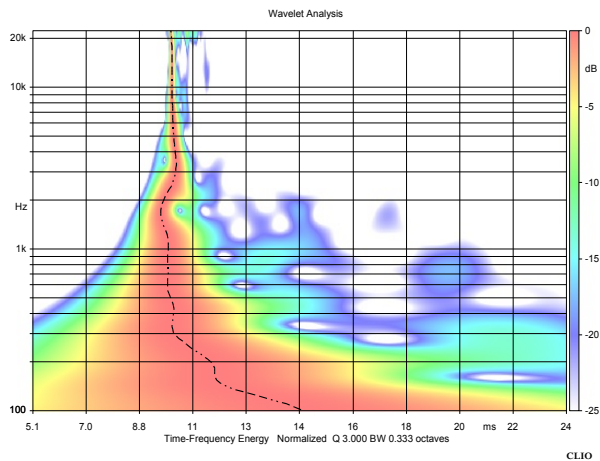


Figura 20: Analisi Wavelet di sistema due vie, curva del tempo di arrivo del picco di energia

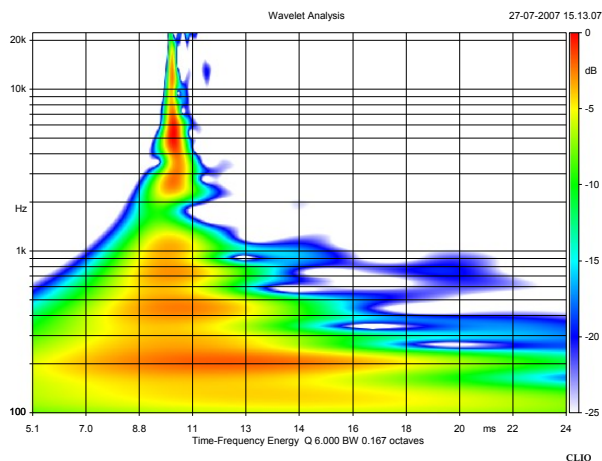


Figura 21: Analisi Wavelet di sistema due vie, BW 1/6 ottava

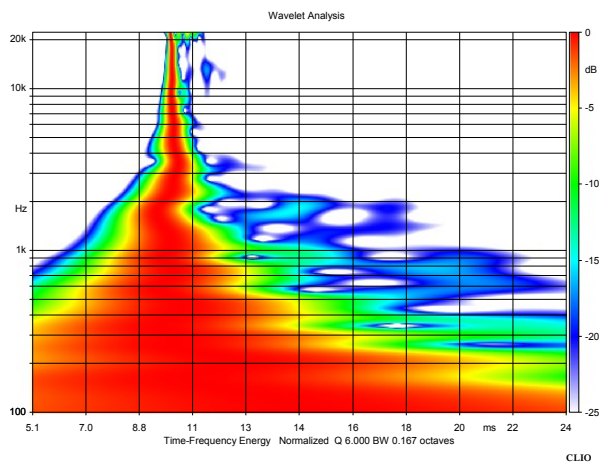


Figura 22: Analisi Wavelet di sistema due vie, BW 1/6 ottava, con normalizzazione del livello

In figura 17 è riportato lo *Scalogramma* dell'analisi Wavelet di un impulso di Dirac. Dato che questa è la risposta di un sistema perfetto, questo grafico indica come dovrebbe apparire l'analisi Wavelet di ogni sistema elettroacustico lineare, definisce quindi una Wavelet obiettivo. E' opportuno notare come il grafico del sistema perfetto presenti una forma non lineare con cui occorre prendere confidenza.

In figura 18 è riportato lo *Scalogramma* dell'analisi Wavelet (d'ora in avanti chiamato semplicemente analisi Wavelet) del sistema elettroacustico professionale a due vie di cui in precedenza erano state illustrate le misure.

Se l'analisi Wavelet viene utilizzata per studiare il decadimento dell'energia o ad esempio l'allineamento temporale, lo *Scalogramma* può essere ulteriormente normalizzato nel livello. In questa normalizzazione, ogni riga dello *Scalogramma*, dove i coefficienti sono calcolati tramite l'equazione (33), è normalizzata al suo valore massimo. Dunque la differenza energetica tra i differenti fattori di scala non viene presa in considerazione, esaltando la visualizzazione del decadimento dell'energia nel sistema. Questo tipo di visualizzazione è molto simile a quella di un insieme di curve ETC calcolate su versioni a banda stretta della risposta all'impulso.

Ad esempio viene mostrata in figura 19 l'analisi Wavelet normalizzata nel livello del solito sistema a due vie.

E' interessante anche mostrare il grafico della curva di tempo di arrivo del picco di energia, ovvero della curva che connette i punti di massima energia per ogni riga, cioè fattore di scala, ovvero frequenza, dello *Scalogramma*. La figura 20 mostra il grafico del tempo di arrivo del picco di energia sotto forma di curva linea punto sovrainposta allo *Scalogramma*. In questa figura lo *Scalogramma* è stato intenzionalmente sfumato per enfatizzare la presenza della curva.

5.2 Bilanciare risoluzione nel tempo ed in frequenza

Il prodotto della larghezza temporale e spettrale è una quantità fissa, il parametro BW della analisi Wavelet permette di bilanciare la risoluzione nel dominio del tempo con quella in frequenza. Dall'esperienza si è visto che valori ottimali per il parametro BW oscillano tra il terzo ed il dodicesimo di ottava.

Nelle figure 21 e 22 viene mostrata l'analisi Wavelet del sistema a due vie con parametro BW 1/6 di ottava. Si noti la minore risoluzione nel tempo e la maggiore risoluzione in frequenza rispetto alla precedente analisi a 1/3 di ottava.

6 APPLICAZIONI

In questa sezione vengono presentate alcune misurazioni di sistemi reali in cui l'applicazione dell'analisi Wavelet si è rivelata essere uno strumento utile e pratico.

Le informazioni che possono essere ottenute tramite l'analisi Wavelet applicata in elettro-acustica sono in genere legate ad argomenti specifici, ad esempio: la risposta nel tempo di un trasduttore (eventualmente accoppiato a dispositivi come guide d'onda), il decadimento dell'energia di un sistema elettroacustico e l'allineamento temporale tra i trasduttori in un sistema a più vie.

6.1 Diffusore professionale da 8" a due vie

Si prende in esame un sistema elettroacustico professionale equipaggiato con un woofer da 8" ed un driver a compressione da 1" caricato su una guida d'onda a copertura costante. Si utilizza l'analisi Wavelet per confrontare l'allineamento temporale di due diverse strategie di crossover.

Si può ottenere facilmente, e questo è esattamente il caso, che il modulo della risposta in frequenza per entrambi gli allineamenti sia praticamente identico (figura 23). Comparando però le curve della risposta in fase (figura 24) è possibile vedere chiaramente che la rotazione di fase imposta dal sistema processato con crossover a fase lineare (LPC) è decisamente minore di quella imposta dallo stesso sistema processato con una rete di crossover passa-tutto (APN).

Il risultato dell'analisi Wavelet per le due strategie di crossover mostra in modo evidente il chiaro miglioramento della risposta nel tempo del crossover a fase lineare (figura 26) rispetto al passa-tutto (figura 25). In questo ultimo caso è possibile vedere come l'energia emessa dal trasduttore delle alte frequenze preceda quella del woofer di una certa quantità di tempo. La ragione principale di questo ritardo delle basse frequenze è una diretta conseguenza del differente ritardo di gruppo in banda passante associato al filtro passa basso se confrontato con quello del filtro passa alto. L'approccio APN non compensa questa distorsione temporale in alcun modo, l'approccio LPC invece utilizza filtri FIR a fase lineare che dispongono di un ritardo di gruppo fisso e costante che ha lo stesso valore per ogni banda, dunque una volta che il ritardo di tempo geometrico è compensato, nessuna distorsione temporale è introdotta dal crossover.

In figura 27 è mostrata la risposta del sistema con crossover LPC con entrambi i trasduttori connessi con la giusta polarità e con uno dei trasduttori con polarità invertita. È interessante vedere il risultato dell'analisi Wavelet del sistema connesso in maniera impropria, la figura 28 rivela in modo chiaro ed evidente il fenomeno della cancellazione di fase.

6.2 Elemento array verticale a tre vie

Si analizza con la Wavelet la risposta di un elemento array verticale a tre vie per studiarne l'allineamento temporale dei vari trasduttori, un sistema simile a questo ma di formato più piccolo è già stato analizzato in un precedente articolo degli autori. Uno sguardo rapido al grafico della risposta in frequenza (Figura 29) mostra che il sistema processato con il suo crossover originale ed un crossover implementato tramite filtri FIR a fase lineare hanno risposta praticamente iden-

tica e che le piccole differenze non sono influenti. Le curve della risposta in fase invece sono decisamente differenti l'una dall'altra (Figura 30). L'analisi Wavelet della risposta all'impulso ottenuta con il crossover originale (Figura 31) mostra che l'approccio di crossover scelto, nonostante abbia effetti positivi nel ridurre la rotazione di fase totale rispetto ad un ipotetico crossover del tipo passa-tutto a tre vie, mostra evidenti segni di distorsione temporale. Il midrange è chiaramente in anticipo sulle uscite di alta e bassa frequenza. L'analisi Wavelet applicata al medesimo sistema processato con crossover a fase lineare (Figura 32) mostra senza ombra di dubbio l'incremento di coerenza temporale e la riduzione di distorsione temporale, con gran parte dell'energia emessa in sincrono praticamente su tutta la banda.

6.3 Driver a compressione su tromba a direttività costante

Una delle caratteristiche più comuni delle trombe a direttività costante (CD) è lo slot di diffrazione utilizzato nella gola della tromba. Dato che le trombe di grande formato ed ampio angolo di copertura utilizzano driver a compressione la cui uscita è generalmente nell'intervallo da 1.5" a 2" di diametro, la tromba non può essere completamente di forma conica. La causa di questo è che, dato il diametro del trasduttore utilizzato, la direttività alle alte frequenze sarà determinata da quella del trasduttore stesso. Per mantenere un ampio angolo di copertura fino all'estremo superiore della banda audio è uso accoppiare il driver ad una porzione esponenziale della tromba che termina in un brusco restringimento e che provoca una diffrazione nella successiva porzione conica della tromba. Questa ultima è di solito poi seguita da una ulteriore sezione conica con apertura più elevata. L'energia sonora che raggiunge lo slot di diffrazione non viene completamente irradiata nella sezione conica. Una parte di energia viene riflessa indietro alla gola del driver a causa del brusco cambiamento di forma della superficie nel punto di diffrazione. Questo genera onde riflesse.

L'analisi Wavelet applicata alla risposta all'impulso di questo tipo di tromba può mostrare quanta energia viene riflessa all'interno della tromba e quali bande di frequenza vengono interessate dal fenomeno per quella specifica tromba.

La risposta in frequenza in figura 33 mostra chiaramente l'effetto delle riflessioni. In figura 34 viene mostrata l'analisi Wavelet relativa in cui si possono notare le riflessioni, ora sia nel tempo che in frequenza.

Nonostante questa guida d'onda misurata mostri in modo marcato l'effetto delle riflessioni allo slot di diffrazione, è piuttosto rappresentativa della qualità media che può essere riscontrata nelle trombe a diffrazione ad ampia copertura angolare utilizzate nei sistemi professionali. Nelle guide d'onda a copertura molto ampia che vengono utilizzate attualmente nella maggioranza dei sistemi in array verticale, l'effetto dello slot di diffrazione è anche peggiore di quello mostrato.

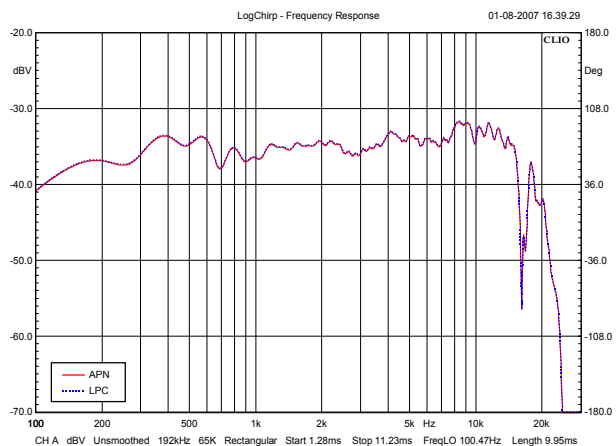


Figura 23: Modulo della risposta in frequenza sistema professionale due vie 8''

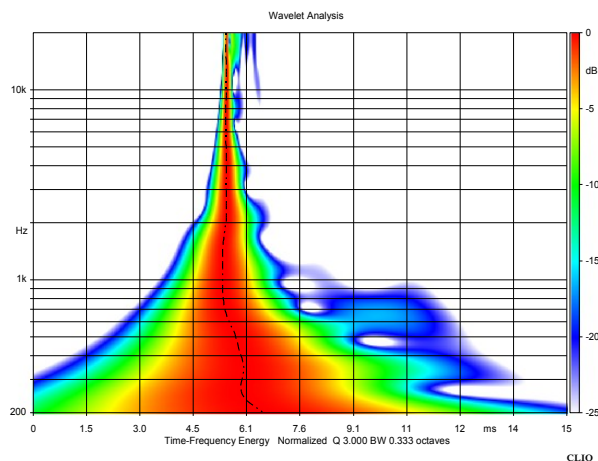


Figura 26: Analisi Wavelet sistema professionale due vie 8'', caso LPC

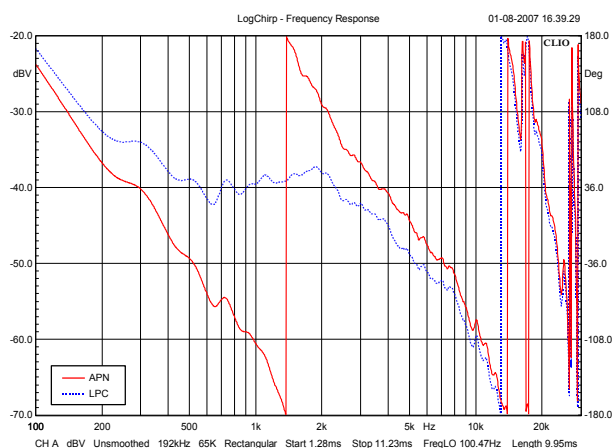


Figura 24: Fase della risposta in frequenza sistema professionale due vie 8''

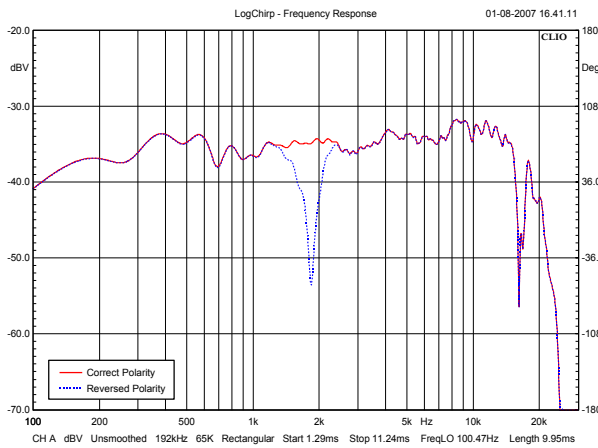


Figura 27: Modulo della risposta in frequenza sistema professionale due vie 8'', polarità invertita driver

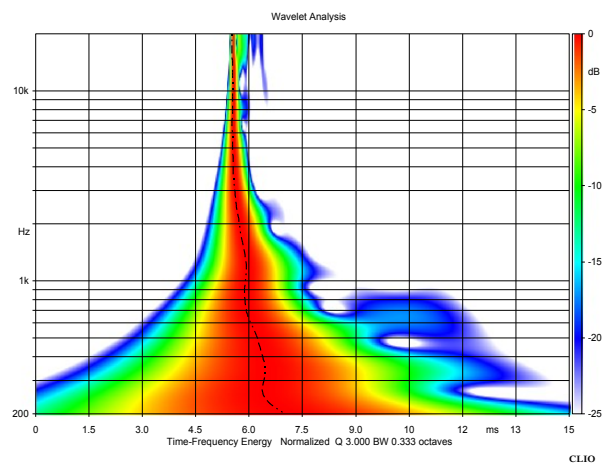


Figura 25: Analisi Wavelet sistema professionale due vie 8'', caso APN

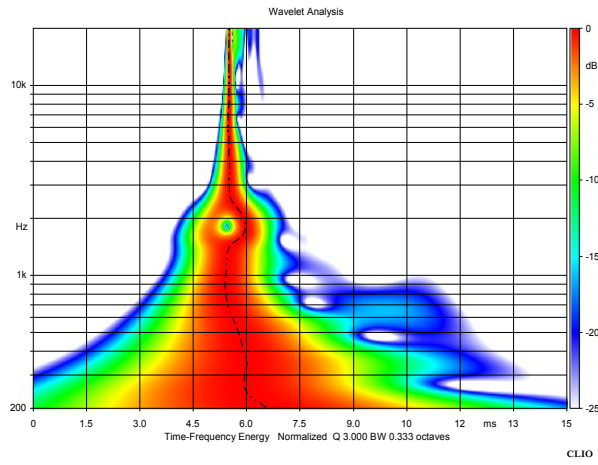


Figura 28: Analisi Wavelet sistema professionale due vie 8'', polarità invertita driver

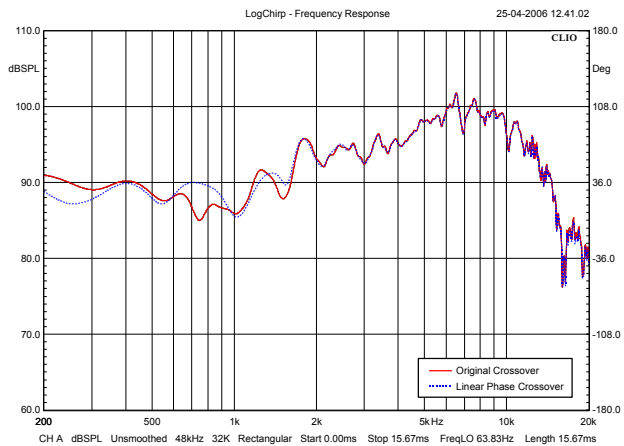


Figura 29: Modulo della risposta in frequenza elemento vertical array

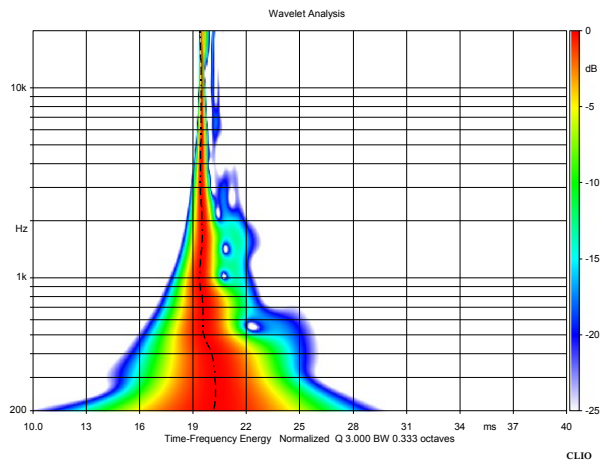


Figura 32: Analisi Wavelet elemento vertical array, crossover a fase lineare

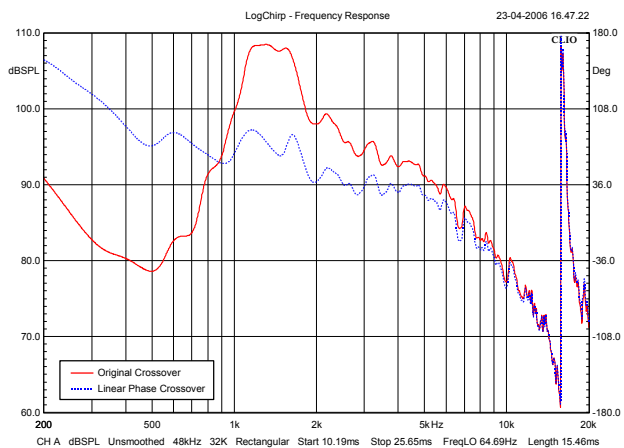


Figura 30: Fase della risposta in frequenza elemento vertical array

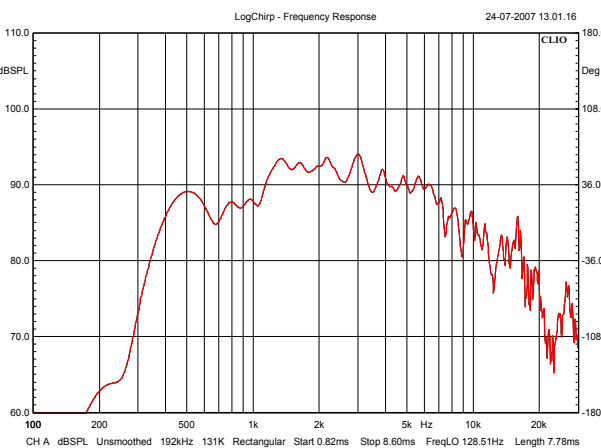


Figura 33: Modulo della risposta in frequenza di driver a compressione su tromba CD

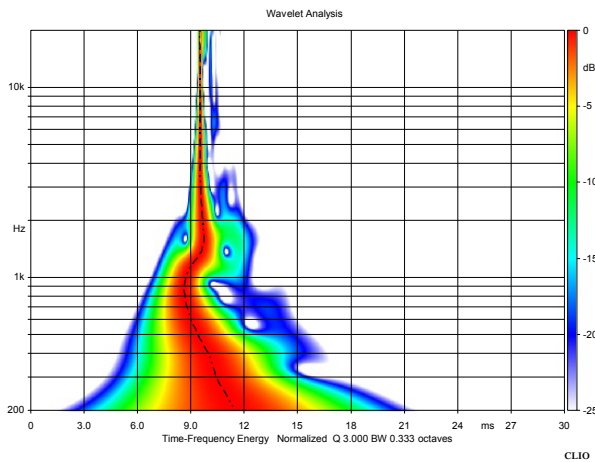


Figura 31: Analisi Wavelet elemento vertical array, preset originale

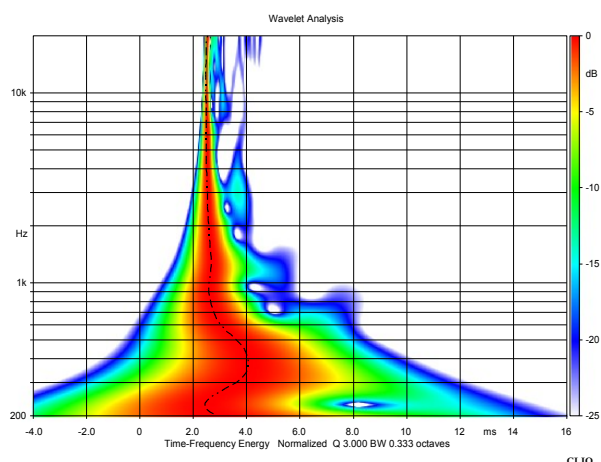


Figura 34: Analisi Wavelet di driver a compressione su tromba CD

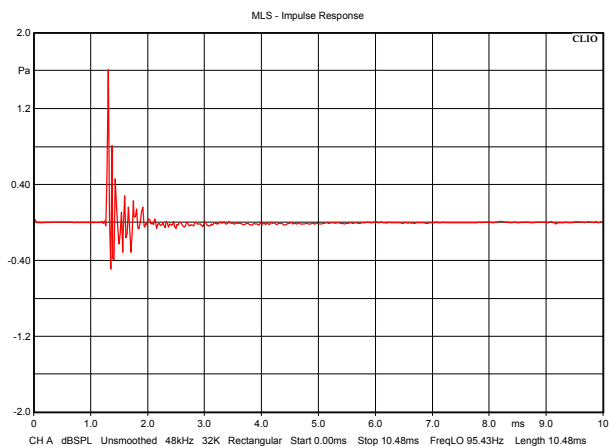


Figura 35: Risposta all'impulso Quad ESL-63

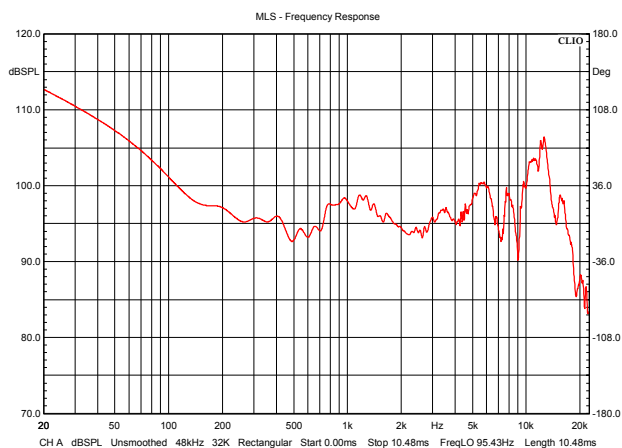


Figura 36: Fase della risposta in frequenza Quad ESL-63

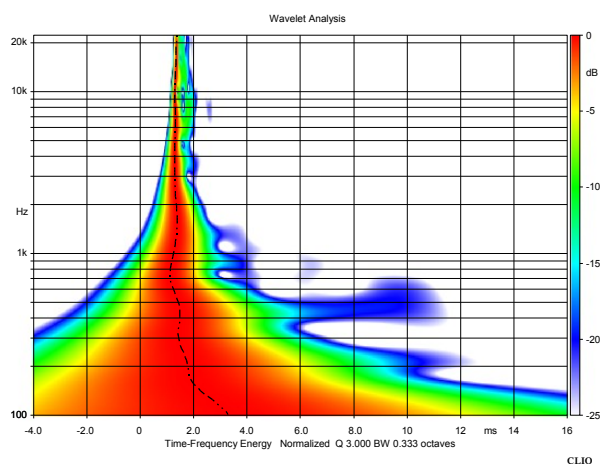


Figura 37: Analisi Wavelet Quad ESL-63

6.4 Altoparlante Hi-Fi Electrostatico

E' stata misurata la risposta di un altoparlante Hi-Fi elettrostatico Quad ESL-63 (Figura 35). La risposta del sistema è ben allineata a causa del principio di funzionamento del sistema stesso. Questo è confermato dalla risposta in fase praticamente piatta (Figure 36) e dal grafico dell'analisi Wavelet (Figure 37). A partire da 100 Hz il sistema non presenta distorsione temporale ed un decadimento uniforme, eccetto per una risonanza di alcuni millisecondi attorno ai 450 Hz.

7 CONCLUSIONI

L'analisi Wavelet è uno strumento potente per la caratterizzazione della risposta di sistemi elettroacustici. In una singola mappa di colore vengono riportate tutte le informazioni sul comportamento congiunto tempo-frequenza del sistema.

Questo strumento può essere utilizzato in modo proficuo dal progettista di sistemi elettroacustici e/o trasduttori. L'analisi Wavelet certamente non può rimpiazzare il grafico della risposta in fase nell'allineamento temporale dei sistemi o il Cumulative Spectral Decay quando il decadimento della risposta deve essere analizzato. E' però un prezioso strumento che può essere utilizzato a fianco delle comuni tecniche, aiutando nell'interpretazione delle caratteristiche altrimenti difficili da comprendere e gestire come la risposta nel tempo ed in fase dei sistemi elettroacustici.

Come sviluppi futuri si intende migliorare la velocità di calcolo ricercando algoritmi di calcolo più efficienti come suggerito in [16] ed integrare l'analisi Wavelet all'interno di uno strumento che permetta di confrontare differenti distribuzioni tempo-frequenza come le note la STFT, la CSD ed altre attualmente in fase di studio.

8 RINGRAZIAMENTI

Desideriamo ringraziare Audiomatica per aver supportato questo lavoro e per aver dato la possibilità di integrare lo strumento di analisi Wavelet all'interno del loro sistema di misura CLIO. Ringraziamenti vanno inoltre a Fabio Blasizzo per i numerosi suggerimenti ed incoraggiamenti, a Bob McCarty e Joerg Panzer per i loro utili commenti.

Riferimenti bibliografici

- [1] M. Di Cola, M. T. Hadelich, D. Ponteggia, D. Saronni, "Linear Phase Crossover Filters Advantages in Concert Sound Reinforcement Systems: a practical approach", Presented at the AES 121st Convention, San Francisco, CA, USA, 2006 October 5—8
- [2] H. Møller, P. Minnaar, S. K. Olesen, F. Christensen, J. Plogsties, "On the Audibility of All-Pass Phase in Electroacoustical Transfer Functions", J. Audio Eng. Soc., vol. 55, No. 3, pp. 115-134 (2007, March).

- [3] D. B. Keele, "Time-Frequency Display of Electroacoustic Data Using Cycle-Octave Wavelet Transforms", Presented at the AES 99th Convention, New York, NY, USA, 1995 October 6—9
- [4] D. W. Gunness, W. R. Hoy, "A Spectrogram Display for Loudspeaker Transient Response", Presented at the AES 119th Convention, New York, NY, USA, 2006 October 7—10
- [5] S. J. Loutridis, "Decomposition of Impulse Responses Using Complex Wavelets", *J. Audio Eng. Soc.*, vol. 53, No. 9, pp. 796-811 (2005, Sept.).
- [6] O. Rioul, M. Vetterli, "Wavelets and signal processing", *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 8, no. 4, Oct. 1991, pp. 14-38
- [7] A. Duncan, "The Analytic Impulse", *J. Audio Eng. Soc.*, vol. 36, pp. 315-327 (1988, May).
- [8] *CLIO Software - User's Manual*, Audiomatica, <http://www.audiomatica.com>
- [9] R. C. Heyser, "Loudspeaker Phase Characteristics and Time Delay Distortion, Parts I and II", *J. Audio Eng. Soc.*, vol. 17, No. 1, pp. 30-41 (1969, Jan.); vol. 17, No. 2, pp. 130-137 (1969 Apr.).
- [10] J. D'Appolito, *Testing Loudspeakers*, Audio Amateur Press, 1998
- [11] A. Lukin, J. Todd, "Adaptive Time-Frequency Resolution for Analysis and Processing of Audio", Presented at the AES 120th Convention, Paris, France, 2006 May 20—23
- [12] C. P. Janse, A. J. M. Kaizer, "Time-Frequency Distributions of Loudspeakers: The Application of the Wigner Distribution", *J. Audio Eng. Soc.*, vol. 31, No. 4, pp. 198-223 (1983, Apr.).
- [13] P. Brunet, Z. Rimkunas, S. Temme, "Evaluation of Time-Frequency Analysis Methods and Their Practical Applications", Presented at the AES 123rd Convention, New York, NY, USA, 2007 October 5—8.
- [14] A. Mertins, *Signal Analysis: Wavelets, Time-Frequency Transforms and Applications*, Wiley, 1999
- [15] R. L. Allen, D. Mills, *Signal Analysis: Time, Frequency, Scale, and Structure*, Wiley-IEEE Press, 2004
- [16] O. Rioul, P. Duhamel, "Fast Algorithms for Discrete and Continuous Wavelet Transforms", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 38, no. 2, Mar. 1992, pp. 569-586.